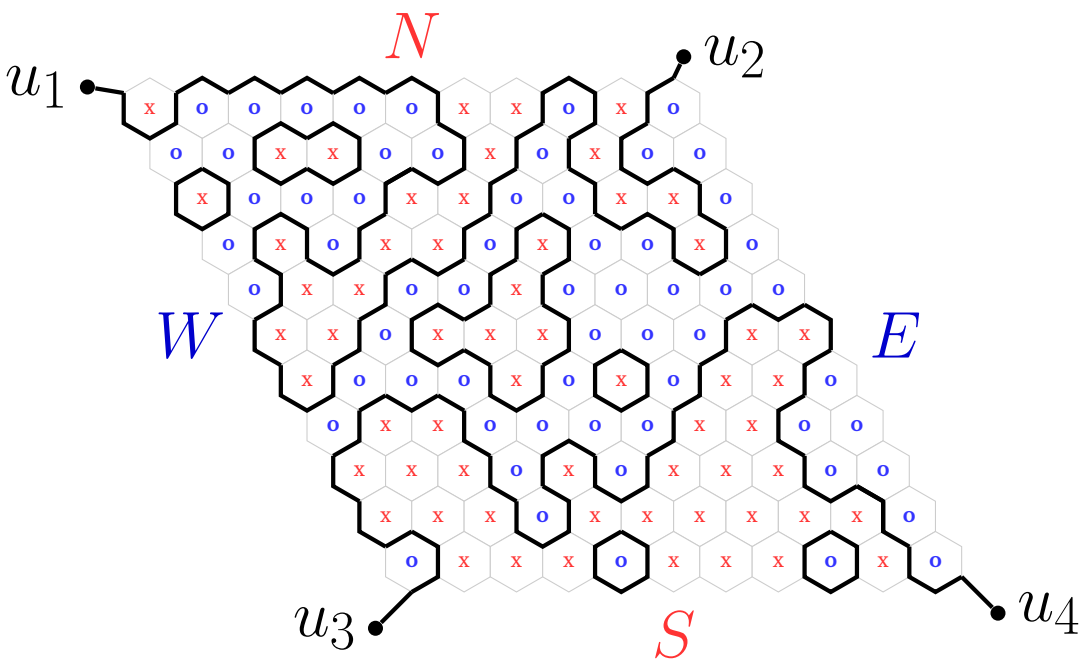
עבודה 2: ערך המקסמין ואסטרטגיות מעורבות
בהצלחה רבה!

שאלה 1 **(20 נקודות)**

יהי $\Gamma = (V, E)$ הגרף של משחק הקס (ראו תרשים למטה) כאשר:

- $V =$ האיחוד של הקבוצת כל הקדוקדים של המשושים של הלוח והקדוקדים $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
- $E =$ הקבוצת הצלעות הנמצאות על הקו תפר בין השני התחומים של השחקנים: אדום (R) וכחול (B).



הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) הקו תפר לא יחזור אף פעם אל קדקוד (של משושה) שכבר עבר דרכו.

ב) קו תפר לא יכול ליצור מסלול פשוט המתחיל בקדקוד u_1 ומסתיים בקדוקד u_3.

שאלה 2 נתון משחק קורנוט עם n שחקנים. יהי q_i כמות המוצר הנוצר על יד שחקן i, ויהי $Q = q_1 + \ldots + q_n$ כמות הכוללת בשוק. יהי

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח כי העלות לשחקן i לייצר כמות q_i היא $C_i(q_i) = cq_i$ כאשר $c < a$.

א) מצאו את שיווי המשקל של המשחק.

ב) מה קורה אם $n \to \infty$?

שאלה 3 נתון משחק דואפול עם פונקצית המחיר

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} .$$

נניח ש פונקציות העלות של השחקנים לא סימטריות:

$$C_1(q_1) = c_1 q_1 \ , \qquad C_2(q_2) = c_2 q_2 \ .$$

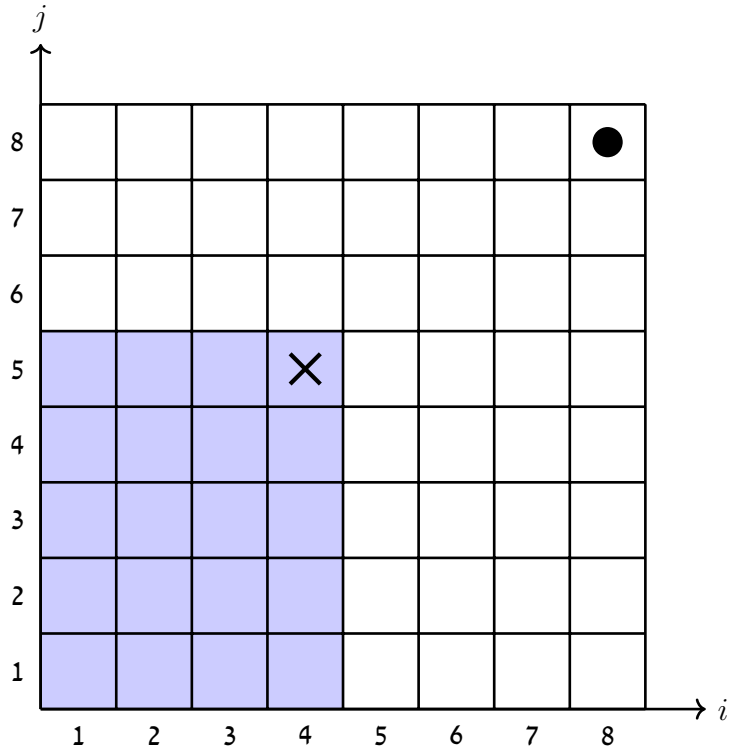
א) חשבו את שיווי המשקל נאש אם $0 < c_i < \frac{a}{2}$ לכל שחקן.

ב) כיצד התשובה משתנה אם $c_1 < c_2 < a$ ו- $2c_2 > a + c_1$?

שאלה 4 נגדיר המשחק הבא על לוח משבצות ריבועי בגודל $n \times m$.

- המשבצות מסומנות בעזרת זוג הקואורדינטות (i, j) כאשר $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq m$.
  - i מסמן את הקואורדינטה האופקית
  - j את הקואורדינטה האנכית.

בתרשים מתואר לוח המשחק עבור $n = m = 8$.



כל שחקן חייב לכבוש בתורו משבצת בכפוף לתנאי הבא:

- אם במהלך k נכבשה המשבצת (i_k, j_k), לא ניתן יותר לכבוש שום משבצת הנמצאת דרום-מערבית ממנה.
- ז"א מסולקות מהלוח כל המשבצות (i, j) המקיימות $i \leq i_k$ ו- $j \leq j_k$.
- במשחק בתרשים למשל, נכבשה המשבצת $(4, 5)$, ולכן סולקן מהלוח כל המשבצות המוצללות.
- שחקן I הוא הפותח במשחק.
- השחקן הכובש את המשבצת (m, n) הוא המפסיד.

יהי G מקרה פרטי של המשחק על לוח $n \times n$. הגדירו אסטרטגיה מנצחת במשחק G והוכיחו כי היא מבטיחה ניצחון לאחד השקחנים.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה A ו- B שתי קבוצות סופיות, ו- $u : A \times B \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו כי:

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} u(a, b) \leq \min_{b \in B} \max_{a \in A} u(a, b) \ .$$

שאלה 6 (20 נקודות)

האם הערך בכל אחד מהמשחקים הבאים קיים? אם כן, מה הוא ומה הן כל האסטרטגיות האופטימליות לכל אחד מהשחקנים. כרגיל, שחקן I הוא שחקן השורה ושחקן II שחקן העמודה.

א)

$I \backslash II$	a	b	c
A	1	2	3
B	4	3	0

ב)

$I \backslash II$	a	b
A	2	2
B	1	3

ג)

$I \backslash II$	a	b
A	3	0
B	2	2
B	0	3

ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d
A	$\frac{7}{2}$	3	4	12
B	7	5	6	13
C	4	2	3	0

שאלה 7 (20 נקודות)

תהיינה A ו- B שתי מטריצות עם תשלומים חיוביים (בעלות ממדים סופיים). הוכיחו כי למשחק הבא אין ערך.

$I \backslash II$		
	A	0
	0	B

שאלה 8 (20 נקודות)

הוכיחו את הטענה הבאה: אם למשחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך, v, ואם s_I^* ו- s_{II}^* אסטרטגיות אופטימליות לשחקנים, אזי $s^* = \left(s_I^*, s_{II}^*\right)$ הוא שיווי משקל עם תשלום $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$

שאלה 9 (20 נקודות)

הוכיחו את הטענה הבאה: במשחק שני שחקנים סכום אפס, אם $s^* = \left(s_I^*, s_{II}^*\right)$ הוא שיווי משקל, אזי יש למשחק ערך $\mathrm{v} = u\left(s_I^*, s_{II}^*\right)$, והאסטרטגיות s_I^* ו- s_{II}^* הן אסטרטגיות אופטימליות.

שאלה 10 (20 נקודות)

נתון משחק נים (Nim) עם שתי ערימות של אבנים. בערימה הראשונה יש n אבנים ובערימה השנייה יש m אבנים. בכל תור, שחקן רשאי לבחור ערימה אחת בלבד ולהוציא ממנה מספר חיובי כלשהו של אבנים (החל מאבן אחת ועד לכל האבנים באותה ערימה). המנצח הוא השחקן שלוקח את האבן האחרונה מהלוח.

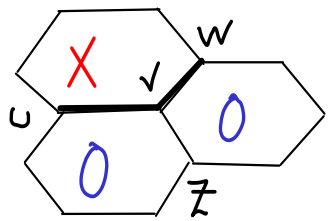
א) הוכיחו כי אם $n = m$, לשחקן השני (זה שלא פותח במשחק) קיימת אסטרטגיה מנצחת מובטחת. מהי אסטרטגיה זו?

ב) הוכיחו כי אם $n \neq m$. לשחקן הראשון (זה שפותח במשחק) קיימת אסטרטגיה מנצחת מובטחת. מהי אסטרטגיה זו?

פתרונות

שאלה 1

א)



- נניח בשלילה שקיים קדקוד v בקו התפר עבורו המסלול עבור דרכו פעמיים.
- יהי v הקדקוד הראשון בקבוצת הקדקודים של הגרף עבורו הקו תפר עובר דרכו פעמיים.
- יש 3 מקרים: המסלול חוזר לקדקוד v דרך הקדקוד u, w או z.
- אם המסלול חוזר ל- v דרך u או w אז גורר סתירה לכך ש- v הקדקוד הראשון עבורו הקו תפר עובר פעמיים.
- אם המסלול חוזר ל- v דרך z אז הקו תפר יפריד בין שני משושים של אותו תחום, בסתירה לכך שהקו תפר קיים רק על הצלעות בין תחומים שונים.

ב) הטענה לא נכונה. אם שחקן אדום מנצח המשחק אז בהכרח יש לו שרשרת המחבר הצלעות N ו- S. השרשרת המנצחת יוצרת מסלול פשוט מ- u_1 ל- u_3.

שאלה 2

הרווח לשחקן i נתון עלי ידי פונקצית התשלום

$$\begin{aligned} u_i(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n) =& P(Q)q_i - C_i = (P(Q)-c)\,q_i \\ =& (a-Q-c)\,q_i \\ =& (a-q_1-q_2-\ldots-q_i-\ldots-q_n-c)\,q_i \end{aligned}$$

הווקטור אסטרטגיות $(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*)$ יהיה שיווי המשקל אם s_i^* תשובה טובה ביותר לשקחן i לכל $1 \le i \le n$. כלומר אם

$$u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i^*,\ldots,q_n^*\right) = \max_{0\le q_i\le\infty} u_i\left(q_1^*,\ldots,q_i,\ldots,q_n^*\right) \ .$$

התשלום u_i מקבל ערך מקסימלי בנקודה שבה $(u_i)'_{q_i} = 0$.

$$\begin{aligned}(u_i)'_{q_i} =& (a - q_1 - \ldots - q_i - \ldots - q_n - c) - q_i \\ =& a - q_1 - \ldots - 2q_i - \ldots - q_n - c \\ \overset{!}{=}& 0 \\ \Rightarrow \quad a - c =& q_1 + \ldots + 2q_i^* + \ldots + q_n\end{aligned}$$

לכל $q \leq i \leq n$. מכיוון שאנחנו נקבל אותה משוואה לכל i, אז בהכרח הערכים של ה- q_i זהים ושווים ל-

$$q_1^* = q_2^* = \ldots = q_i^* = \ldots = q_n^* \ .$$

נציב זה במשוואה הקודם ואז נקבל

$$(n+1)q_i^* = a - c \qquad \Rightarrow \qquad q_i^* = \frac{a-c}{n+1} \ .$$

<u>שאלה 3</u> פונקצית המחיר היא

$$P(Q) = a - Q \ ,$$

כאשר $Q = q_1 + q_2$. הרווח לשחקן 1 הוא

$$u_1 = (P - c_1)q_1 = (a - Q - c_1)q_1 = (a - q_1 - q_2 - c_1)q_1 \ ,$$

והרווח לשחקן 2 הוא

$$u_2 = (P - c_2)q_2 = (a - Q - c_2)q_2 = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2 \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_1)'_{q_1} = (a - c_1 - q_1 - q_2) - q_1 = a - c_1 - 2q_1 - q_2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} \ .$$

בנקודת שיווי משקל:

$$(u_2)'_{q_1} = (a - c_2 - q_1 - q_2) - q_2 = a - c_2 - 2q_1 - q_2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{a - c_2 - q_1}{2} \ .$$

נציב התנאי השני בתנאי הראשון:

$$q_1^* = \frac{a - c_1 - q_2}{2} = q_1^* = \frac{a - c_1 - \left(\frac{a - c_2 - q_1}{2}\right)}{2} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{q_1^*}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3q_1^*}{4} = \frac{a}{4} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \ .$$

נציב זה בביטוי ל- q_2^* ונקבל

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} \ .$$

$$2c_2 > a + c_1 \quad \Rightarrow \quad a - 2c_2 + c_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} < 0 \ .$$

לכן בהכרח $q_2 = 0$ בגלל כמות לא יכולה להיות שלילית.

שאלה 4

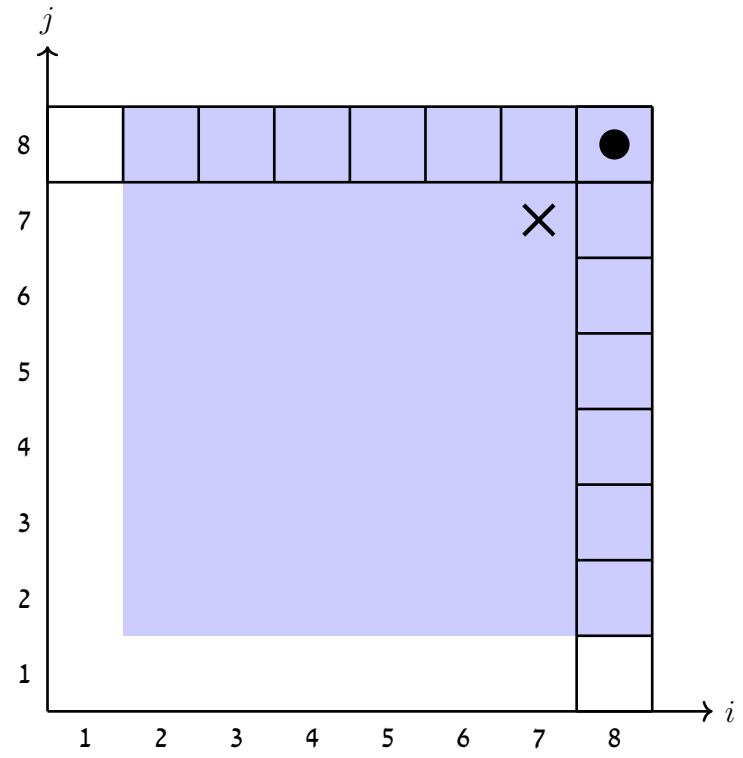
בניית האסטרטגיה

במשחק צ'ומפ על לוח ריבועי $n \times n$ האסטרטגיה הבאה הינה אסטרטגיה מנצחת לשחקן I.

- בתור הראשון שחקן I כובש את המשבצת $(7,7)$.
- מכאן ואילך, שחקן I משחק באופן סימטרי לשחקן II.

ז"א אם שחקן II כובש את המשבצת (i,j), אז שחקן I, במהלך שלאחר מכן, יכבוש את המשבצת (j,i).

הוכחת נכונות



- נניח בשלילה כי האסטרטגיה הזו אינה אסטרטיגיה מנצחת לשחקן I.

$\Leftarrow$ אסטרטגיה הזו היא אסטרטגיה מנצחת לשחקן II.

- יהי k טבעי המונה המהלך של המשחק, כך ש:
  - $k=0$ המהלך הראשון שבו שחקן I כובש משבצת $(2,2)$,
  - $k=1$ המהלך הבא שבו שחקן II כובש משבצת,
  - $k=2$ המהלך לאחר מכן שבו שחקן I כובש משבצת, וכן הלא.

- נגדיר סדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ כאשר: $a_0 = (2,2)$ ולכל $m > 0$:

$$a_m = \begin{cases} \{(i_m, 1), (1, i_m)\} & : \quad \text{שחקן } II \text{ כובש } (i_m, 1) \text{ במהלך } 2m-1 \\ \{(1, i_m), (i_m, 1)\} & : \quad \text{שחקן } II \text{ כובש } (1, i_m) \text{ במהלך} \end{cases} .$$

ז"א לכל $m > 0$, האיבר a_m מסמן זוג משבצות כאשר הראשונה נכבשת ע"י שחקן II במהלך $k = 2m-1$ והשנייה נכבשת ע"י שחקן I במהלך $k = 2m$ שלאחר מכן.

- תהי b_m הסדרה מוגדרת:

$$b_m = i_m \quad \Longleftrightarrow \quad [a_m = (\{(i_m, 1), (1, i_m)\}) \ \vee \ a_m = (\{(1, i_m), (i_m, 1)\}) \ ] \ .$$

- על פי האסטרטגיה, $1 \leq i_m < i_{m-1} \leq n \Leftarrow b_m$ סדרה יורדת מונוטונית וחסומה $\Leftarrow b_m$ מתכנסת.
- בנוסף המשחק מסתיים כאשר שחקן כובש המשבצת $(1,1)$.

$\Leftarrow$ קיים N כך שהסדרה מסתיימת כאשר $a_N = \{(1,1), (1,1)\}$.

$\Leftarrow$ ז"א קיים טבעי N כך שבמהלך $k = 2N-1$, שחקן II כובש משבצת $(1,1)$.

$\Leftarrow$ שחקן II בהכרח מפסיד, בסתירה לכך שהאסטרטגיה של המשפט היא אסטרטגיה מנצחת לשחקן II.

שאלה 5

שאלה 6

שאלה 7

שאלה 8

שאלה 9

שאלה 10

א) כאשר $n = m$, לשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת המבוססת על סימטריה (אסטרטגיית העתקה). בכל תור, יהא אשר יהא המהלך של שחקן I (הוצאת k אבנים מערימה מסוימת), שחקן II פשוט "מעתיק" את המהלך ומוציא בדיוק את אותו מספר אבנים (k) מהערימה השנייה. באופן זה, שחקן II מבטיח שבסוף כל תור שלו, מספר האבנים בשתי הערימות יישאר שווה. מכיוון שהמשחק סופי (מספר האבנים הולך וקטן), שחקן I ימצא את עצמו בסופו של דבר מול שתי ערימות ריקות ולא יוכל לבצע מהלך. לכן, שחקן II ייקח את האבן האחרונה וינצח.

ב) כאשר $n \neq m$, לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $n > m$. במהלך הראשון שלו, שחקן I ייקח $n - m$ אבנים מהערימה הראשונה (הגדולה יותר). לאחר מהלך זה, המצב בלוח יהיה שתי ערימות שוות בגודלן, כאשר כל אחת מכילה m אבנים. כעת, המשחק חזר למצב המתואר בסעיף א', אך תורו של שחקן II לשחק (כלומר, שחקן II נמצא כעת בעמדת הפותח של משחק סימטרי). מכאן ואילך, שחקן I פשוט ישתמש באסטרטגיית הסימטריה (יעתיק את מהלכיו של שחקן II לערימה השנייה) ויבטיח את ניצחונו.